MATHEMATICS

DUALITÄT IN DEN METHODEN ZUR ERWEITERUNG VON BESCHRÄNKT- WIE VON TOTAL-ADDITIVEN MASZEN. I

VON

J. RIDDER

(Communicated at the meeting of May 22, 1971)

In Teil α. wird gezeigt wie ausgehend von „äußeres Maß"-Betrachtungen auf der einen Seite (Sätze A und B), von „inneres Maß"-Betrachtungen auf der anderen Seite (Sätze A^{bis} und B^{bis}) Erweiterungen zu beschränkt-additiven Maßen erhalten werden können, welche unter der im Schlußpar. dieses Teiles gemachten Annahme zusammenfallen. Für total-additive Maße ist in Teil β. eine korrespondierende Behandlung möglich; auf der einen Seite führen die Sätze A_1 und B_1, auf der anderen Seite die Sätze A_1^{bis} und B_1^{bis} zu Erweiterungen bei total-additiven Maßen, wobei auch der Schußpar. eine Annahme enthält, unter welcher die beiden Verfahrensweisen zum gleichen Resultat führen.

Die Arbeit erweitert die Dualitätsbetrachtungen von zwei Publikationen in diesen Proceed. Series A, 73, S. 361–375 und 376–384 (1970), und zwar unter Anwendung von Begriffen korrespondierend mit den „tight measures" [1]) in abstrakten Räumen bei F. TOPSØE, *Topology and Measure*, Lecture Notes in Mathematics 1970; man siehe hier Annahmen II. und $\overline{\text{II}}$. sowohl in der Einleitung von Teil α. wie in der von Teil β.

α. Methoden zur Konstruktion von beschränkt-additiven Maßen in Somenringen.

Einleitung. In meiner zweiten Arbeit in diesen Proceed. A, 73 (1970) wurden „zueinander adjungierte" äußere und innere Maßfunktionen m^0 bzw. m_0 (im Sinne von loc. cit. § 4) konstruiert, ausgehend von einem beschränkt-additiven Maße μ, welches einer in wichtigen Fällen erfüllten Hypothese (siehe loc. cit. § 5^{bis}) genügt; auf den Somen eines Somenringes K fielen dabei m^0 und m_0 zusammen; ihr gemeinsamer Wert für diese Somen lieferte eine beschränkt-additive Erweiterung m von μ (loc. cit. § 6).

Die Bedingungen werden hier eingeschränkt. $\mathfrak{B}$ sei wieder ein Somenring ($\equiv$ Boolescher Somenverband), mit Nullsoma 0; dieser enthalte *ein Teilsystem* $\mathfrak{A}^0 \equiv \mathfrak{A}^0(0; +, \cdot)$, wobei $0 \in \mathfrak{A}^0$ und aus $a, b \in \mathfrak{A}^0$ folgend $a+b$,

1) Der Namen wurde ursprünglich nur für in speziellen metrischen Räumen betrachtete Maße mit einer zugehörigen „Kompaktheits"-Eigenschaft angewandt. Vergl. Preface und References bei TOPSØE.

$a \cdot b \in \mathfrak{A}^0$; daneben sei $\mathfrak{A}$ der Teilsomenring von $\mathfrak{B}$, dessen jedes Element (Soma) sich durch ein Soma aus $\mathfrak{A}^0$ überdecken läßt.

μ sei *eine in* $\mathfrak{A}^0$ *definierte Somenfunktion, mit Werten in* $\bar{R}_+$, und mit entweder (in dem Fall von m^0) den Eigenschaften:

I. es gibt ein Soma $a_0 \in \mathfrak{A}^0$ mit $0 < \mu(a_0) < \infty$;

II. bei $a_j \in \mathfrak{A}^0$ $(j=1, 2)$, $a_1 \supseteqq a_2$ und $\mu(a_1)$ endlich ist

$$\mu(a_1) - \mu(a_2) = \text{untere Grenze aller } \mu(b) \text{ mit } b \in \mathfrak{A}^0,\ a_1 - a_2 \subseteqq b;$$

II$^{\mathrm{b}}$. aus $a_j \in \mathfrak{A}^0$ $(j=1, 2)$ und endlichen $\mu(a_j)$ folgt $\mu(a_1 + a_2) \leqq \mu(a_1) + \mu(a_2)$, oder (in dem Fall von m_0) den Eigenschaften:

I. es gibt ein Soma $a_0 \in \mathfrak{A}^0$ mit $0 < \mu(a_0) < \infty$;

$\overline{\text{II}}$. bei $a_j \in \mathfrak{A}^0$ $(j=1, 2)$, $a_1 \supseteqq a_2$ und $\mu(a_1)$ endlich ist

$$\mu(a_1) - \mu(a_2) = \text{obere Grenze aller } \mu(b) \text{ mit } b \in \mathfrak{A}^0,\ a_1 - a_2 \supseteqq b;$$

IV. bei $a_j \in \mathfrak{A}$ $(j=1, 2)$, und endlicher oberer Grenze der $\mu(\bar{a}_j)$ für die Somen $\bar{a}_j \in \mathfrak{A}^0, \subseteqq a_j$ gibt es ein $b \supseteqq a_1 + a_2, \in \mathfrak{A}^0$ mit $\mu(b)$ endlich. [2])

In §§ 1, 2 wird der Fall (m^0), in §§ 1$^{\text{bis}}$, 2$^{\text{bis}}$ der Fall (m_0) betrachtet; einen dualen Zusammenhang beider Verfahren findet man in § 3.

§ 1. Die Eigenschaften I., II. und II$^{\mathrm{b}}$. liefern die Folgerungen:

1°. μ ist monoton nicht-abnehmend für die Somen von $\mathfrak{A}^0$, d.h. aus $a_1 \supset a_2$, $a_j \in \mathfrak{A}^0$ $(j=1, 2)$ folgt immer $\mu(a_1) \geqq \mu(a_2)$.

B e w e i s. Ist $\mu(a_1)$ endlich, so folgt aus Wertebereich von $\mu \subseteqq \bar{R}_+$ und II.: $\mu(a_2) \neq \infty$. Also ist $\mu(a_2)$ endlich, mit $\mu(a_2) \leqq \mu(a_1)$.

Bei $\mu(a_1) = \infty$ und $a_1 \supset a_2$ ist immer $\mu(a_2) \leqq \mu(a_1)$.

2°. $\mu(0) = 0$.

B e w e i s. Nach I. und II. ist

(1) $0 = \mu(a_0) - \mu(a_0) = \text{untere Grenze aller } \mu(b)$ mit $b \in \mathfrak{A}^0$ und $a_0 - a_0 = 0 \subseteqq b$;

dabei gehört auch das Soma 0 unter den b.

Aus $\mu(0) > 0$ folgte, nach 1°., $\mu(b) \geqq \mu(0) > 0$, für alle hier zugelassenen Werte b im Widerspruch zu (1). Also muß $\mu(0) = 0$ sein.

3°. R e c h t f e r t i g u n g der Annahme II.: Bei a_1, a_2 wie in II., „falls auch $a_1 - a_2 \in \mathfrak{A}^0$", ist nach 1°. $\mu(a_1 - a_2) \leqq \mu(a_1)$, somit ebenfalls endlich. Anwendung von II. auf das Paar $\{a_1 - a_2, 0\}$ liefert:

$\mu(a_1 - a_2) - \mu(0) = \text{untere Grenze aller } \mu(b)$ bei $b \in \mathfrak{A}^0$, $(a_1 - a_2) - 0 \subseteqq b$ oder, mit 2°.,

$$\mu(a_1 - a_2) = \text{untere Grenze aller } \mu(b) \text{ bei } b \in \mathfrak{A}^0 \text{ und } a_1 - a_2 \subseteqq b.$$

Mit II. folgt dann weiter:

$$\mu(a_1 - a_2) = \mu(a_1) - \mu(a_2).$$

---

[2]) Zu bemerken ist daß aus I., $\overline{\text{II}}$. und IV. sich die obige Eigenschaft II$^{\mathrm{b}}$. ableiten läßt. Siehe dabei 4° in § 1$^{\text{bis}}$. — IV korrespondiert mit der im ersten Absatz dieser Einleitung angegebenen Hypothese.

Definition. Für jedes $a \in \mathfrak{A}$ sei $m^0(a)$ die untere Grenze der $\mu(b)$ mit $b \supseteqq a, \in \mathfrak{A}^0$.

Bemerkung. Für jedes $a \in \mathfrak{A}^0$ ist also $m^0(a) = \mu(a)$.

4°. bei $a_1, a_2 \in \mathfrak{A}^0$ und $\mu(a_1 + a_2)$ endlich ist

$$\mu(a_1) + \mu(a_2) = \mu(a_1 + a_2) + \mu(a_1 \cdot a_2).$$

Beweis. Mit II. folgt

(2) $m^0(b_1) - m^0(b_2) = m^0(b_1 - b_2)$ bei $b_1 \supseteqq b_2$; die $b_j \in \mathfrak{A}^0$; $m^0(b_1)$ endlich.

Wegen $a_1 - a_1 \cdot a_2 = (a_1 + a_2) - a_2$ liefert Anwendung von (2) auf die Paare $\{a_1, a_1 \cdot a_2\}$ und $\{a_1 + a_2, a_2\}$:

$$m^0(a_1) - m^0(a_1 \cdot a_2) = m^0(a_1 - a_1 \cdot a_2) = m^0((a_1 + a_2) - a_2) = m^0(a_1 + a_2) - m^0(a_2),$$

wodurch

$$m^0(a_1) + m^0(a_2) = m^0(a_1 + a_2) + m^0(a_1 \cdot a_2),$$

also auch

$$\mu(a_1) + \mu(a_2) = \mu(a_1 + a_2) + \mu(a_1 \cdot a_2).$$

Definition. Die Klasse K von m^0-meßbaren Somen sei die Teilklasse von $\mathfrak{A}$, für deren jedes Element a bei jedem $w \in \mathfrak{A}^0$ mit $m^0(w)$ endlich gilt:

$$m^0(w) = m^0(w \cdot a) + m^0(w - w \cdot a).$$

Lemma. Jedes Soma $a \in \mathfrak{A}^0$ (also insbes. das Soma 0) ist m^0-meßbar, mit dem Maß $m(a) \equiv m^0(a) = \mu(a)$.

Beweis. Bei $w, a \in \mathfrak{A}^0$ und $m(w) \equiv m^0(w)$ endlich ist auch $w \cdot a \in \mathfrak{A}^0$, wobei $m^0(w) - m^0(w \cdot a) = \mu(w) - \mu(w \cdot a) =$ (II.) untere Grenze aller $\mu(b)$ mit $b \in \mathfrak{A}^0$, $w - w \cdot a \subseteqq b =$ (erste Def.) $m^0(w - w \cdot a)$, also

$$m^0(w) = m^0(w \cdot a) + m^0(w - w \cdot a),$$

somit nach der zweiten Definition a m^0-meßbar.

Lemma. Bei v_j $(j = 1, 2) \in \mathfrak{A}$ und $m^0(v_1 + v_2)$ endlich ist

$$m^0(v_1 + v_2) \leqq m^0(v_1) + m^0(v_2). \tag{3}$$

Beweis. Bei $\varepsilon > 0$ gibt es $\bar{v}_j \in \mathfrak{A}^0$ mit $\bar{v}_j \supseteqq v_j$ und $\mu(\bar{v}_j) < m^0(v_j) + \varepsilon$ $(j = 1, 2)$. Dadurch ist

$$m^0(v_1 + v_2) \leqq \mu(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) \leqq (4°.) \mu(\bar{v}_1) + \mu(\bar{v}_2) < m^0(v_1) + m^0(v_2) + 2\varepsilon,$$

also auch (3).

Folgerung 5°. Die Klasse K in der letzten Definition ändert sich nicht, wenn man „bei jedem $w \in \mathfrak{A}^0$" durch „bei jedem $w \in \mathfrak{A}$", wieder „mit $m^0(w)$ endlich", ersetzt.

Beweis. Es genügt aus der m^0-Meßbarkeit von $a \in \mathfrak{A}$ gemäß der Definition die m^0-Meßbarkeit von a gemäß der abgeänderten Definition abzuleiten.

Im entgegengesetzten Fall gibt es ein Soma $w \in \mathfrak{A}, \notin \mathfrak{A}^0$ mit $m(w) \equiv m^0(w)$ endlich und

$$m^0(w) \neq m^0(w \cdot a) + m^0(w - w \cdot a),$$

somit, nach dem vorigen Lemma, mit

$$m^0(w) < m^0(w \cdot a) + m^0(w - w \cdot a);$$

es gibt dann ein $\eta > 0$ mit

$$m^0(w) + \eta = m^0(w \cdot a) + m^0(w - w \cdot a). \tag{4}$$

Zu w gibt es ein m^0-meßbares Soma $\bar{w} \supset w$ und $\in \mathfrak{A}^0$ mit

$$m(\bar{w}) \equiv m^0(\bar{w}) = m^0(w) + \bar{\eta}, \text{ wobei } \bar{\eta} < \eta. \tag{5}$$

Nun ist

$$\bar{w} \cdot a \supseteqq w \cdot a \text{ und } \bar{w} - \bar{w} \cdot a \supseteqq w - w \cdot a,$$

wodurch

$$m^0(\bar{w} \cdot a) \geqq m^0(w \cdot a) \text{ und } m^0(\bar{w} - \bar{w} \cdot a) \geqq m^0(w - w \cdot a). \tag{6}$$

Mit (5), (4) und (6) folgt

$$m(\bar{w}) = m^0(w) + \bar{\eta} < m^0(w \cdot a) + m^0(w - w \cdot a) \leqq m^0(\bar{w} \cdot a) + m^0(\bar{w} - \bar{w} \cdot a)$$

oder

$$m(\bar{w}) < m^0(\bar{w} \cdot a) + m^0(\bar{w} - \bar{w} \cdot a);$$

es gibt dann somit ein $\bar{w} \in \mathfrak{A}^0$, mit $m^0(\bar{w})$ endlich, zu welchem eine selbe Ungleichheitsrelation wie zu w gehört. Dies widerspricht jedoch die m^0-Meßbarkeit von a gemäß der ursprünglichen Definition.

Folgerung 6°. Aus $c \in \mathfrak{A}$ und $a \cdot c \in \mathfrak{A}^0$ für jedes $a \in \mathfrak{A}^0$ mit $\mu(a)$ $[= m^0(a)]$ endlich folgt $c \in K$.

Beweis. Mit (2) folgt $m^0(a) - m^0(a \cdot c) = m^0(a - a \cdot c)$, wonach die letzte Def. liefert: $c \in K$.

Die vorausgesetzte Eigenschaft II^b. von μ findet Anwendung beim Beweise von

Folgerung 7°. Bei v_j $(j = 1, 2) \in \mathfrak{A}$ und endlichen $m^0(v_j)$ ist auch $m^0(v_1 + v_2)$ endlich mit

$$m^0(v_1 + v_2) \leqq m^0(v_1) + m^0(v_2). \tag{7}$$

Beweis. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es $\bar{v}_j \supseteqq v_j, \in \mathfrak{A}^0$ mit $\mu(\bar{v}_j) < m^0(v_j) + \varepsilon$, wodurch

$$m^0(v_1 + v_2) \leqq \mu(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) \leqq (\mathrm{II^b.})\, \mu(\bar{v}_1) + \mu(\bar{v}_2) < m^0(v_1) + m^0(v_2) + 2\varepsilon,$$

woraus (7) folgt.

§ 2. Satz A. Die in § 1 für die Somen von $\mathfrak{A}$ definierte Somenfunktion m^0 ist für $\mathfrak{A}$ ein (reguläres) äußeres Maß im Sinne der in der

Einleitung zitierten Arbeit, §§ 1, 2, 3 (mit den das äußere Maß charakterisierenden Axiomen 1°–4°, 5°, 6°). Die hier in § 1, zweite Def. eingeführte Somenklasse K der m^0-meßbaren Somen ist ein Somenring $\supseteqq \mathfrak{A}^0$; das Maß $m \equiv m^0$ ist additiv für die Somen von K, während für jedes $a \in \mathfrak{A}^0$ gilt:

$$m(a) \equiv m^0(a) = \mu(a);$$

$(K|m \equiv m^0)$ ist eine Erweiterung von $(\mathfrak{A}^0|\mu)$; sie ist vollständig in $\mathfrak{A}$ (im Sinne von loc. cit. Fußn. 3).

Beweis. Axiom 1° (es gibt ein Soma $w \in \mathfrak{A}$ mit $m^0(w)$ endlich und $\neq 0$) ist eine Folge der ersten Def. in § 1 und I. mit Folgerung 1°.

Axiom 2° (das Nullsoma ist m^0-meßbar; dabei ist $a \in \mathfrak{A}$ m^0-meßbar falls *bei jedem* $w \in \mathfrak{A}$ *mit* $m^0(w)$ *endlich* gilt: $m^0(w) = m^0(w \cdot a) + m^0(w - w \cdot a)$) folgt aus dem ersten Lemma von § 1 mit Folgerung 5°.

Axiom 3° (aus $a, b \in \mathfrak{A}$, $a \subset b$ folgt $m^0(a) \leqq m^0(b)$) ist eine Folge der ersten Def. von § 1 und Folgerung 1°.

Aus den Axiomen 1°, 2°, 3° allein folgte schon nach loc. cit. § 1, daß die Klasse K der m^0-meßbaren Somen in $\mathfrak{A}$ ein Somenring ist, wobei für $a, b \in K$ und $m^0(a+b)$ endlich gilt:

$$m^0(a+b) = m^0(a) + m^0(b) - m^0(a \cdot b).$$

Nach dem ersten Lemma in § 1 ist $\mathfrak{A}^0 \subseteqq K$, wobei aus $a \in \mathfrak{A}^0$ folgt $m(a) \equiv m^0(a) = \mu(a)$.

Der vorletzte Absatz liefert, bei $a \cdot b = 0$, und $a, b \in K$,

$$m^0(a+b) = m^0(a) + m^0(b), \tag{8}$$

wenn nur $m^0(a+b)$ endlich ist. Ist dagegen $m^0(a+b) = \infty$, so können, nach Folgerung 7°, $m^0(a)$ und $m^0(b)$ nicht beide endlich sein, woraus auch dann (8) folgt. Also gilt (8) allgemein in K.

Axiom 4° (zu $a \in \mathfrak{A}$ mit $m^0(a)$ endlich gibt es ein $b \in K, \supseteqq a$ mit $m^0(b)$ endlich) folgt aus der Definition von m^0 und $\mathfrak{A}^0 \subseteqq K$. Das gleiche gilt für

Axiom 5° (für $a \in \mathfrak{A}$ mit $m^0(a)$ endlich ist $m^0(a)$ gleich der unteren Grenze der Werte von $m^0(\bar{b})$ für alle $\bar{b} \in K, \supseteqq a$).

Axiom 6° (bei $a_1, \ldots, a_k$ $(k \geqq 2)$ m^0-meßbar, $a_{j_1} \cdot a_{j_2} = 0$ $(j_1 \neq j_2)$, und $m^0(\sum_{j=1}^{k} a_j) = \infty$ ist auch $\sum_{j=1}^{k} m^0(a_j) = \infty$) folgt indirekt aus der Gültigkeit von (8) in K.

Die Behauptungen des Satzes sind somit erfüllt bis auf die Vollständigkeit von m^0 in $\mathfrak{A}$; diese folgt wie loc. cit. Fußn. 3.

Bemerkungen. a. Es gibt ein kleinster, das System $\mathfrak{A}^0$ umfassender *Somenring* $\mathfrak{A}^{00}$, welcher in K enthalten ist, wodurch $\mathfrak{A}$ auch als durch $\mathfrak{A}^{00}$ überdeckter Teilsomenring von $\mathfrak{B}$ aufzufassen ist.

b. Bei $\bar{\mu} \equiv m^0$ für die Somen von $\mathfrak{A}^{00}$ ist $\bar{\mu}$ *additiv auf* $\mathfrak{A}^{00}$, *mit Werten in* $\bar{R}_+$. Daneben ist für jedes Soma $a \in \mathfrak{A}$ mit $m^0(a)$ endlich:

$m^0(a) =$ (Ax. 5°) untere Grenze der $m^0(\bar{b})$ bei $\bar{b} \supseteqq a, \in K$,
$=$ (Def.) untere Grenze der $\mu(b)$ bei $b \supseteqq a, \in \mathfrak{A}^0$, somit auch:
$=$ untere Grenze der $\bar{\mu}(c)$ bei $c \supseteqq a, \in \mathfrak{A}^{00}$;

und für jedes a mit $m^0(a) = \infty$:

zufolge der Monotonie von m^0: $m^0(\bar{b}) = \infty$ für $\bar{b} \supseteqq a, \in K$,
zufolge der Definition von m^0: $\mu(b) = \infty$ für $b \supseteqq a, \in \mathfrak{A}^0$,
somit auch $\bar{\mu}(c) = \infty$ für jedes $c \supseteqq a, \in \mathfrak{A}^{00}$,
also wieder $m^0(a) =$ untere Grenze der $\bar{\mu}(c)$ bei $c \supseteqq a, \in \mathfrak{A}^{00}$.

Damit folgt:

Satz B. Die Anwendung des Satzes loc. cit. § 5 [3]) auf $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}^{00}$, $\bar{\mu}$ führt zu demselben äußeren Maß m^0 auf $\mathfrak{A}$, demselben Somenring $K, \supseteqq \mathfrak{A}^{00} \supseteqq \mathfrak{A}^0$ und demselben auf K additiven Maß $m \equiv m^0$ wie die Anwendung von Satz A auf $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}^0$, μ; $(K|m \equiv m^0)$ ist auch Erweiterung von $(\mathfrak{A}^{00}|\bar{\mu})$.

§ 1^{bis}. Die Eigenschaften I., $\overline{\text{II}}$. und IV. (in der Einleitung) liefern die Folgerungen:

1°. μ ist nicht-abnehmend für die Somen von $\mathfrak{A}^0$, d.h. aus $a_1 \supset a_2$, $a_j \in \mathfrak{A}^0$ $(j = 1, 2)$ folgt $\mu(a_1) \geqq \mu(a_2)$.

Beweis. Es genügt $\mu(a_1)$ endlich vorauszusetzen. Dann folgt aus $0 \in \mathfrak{A}^0$ und $\overline{\text{II}}$.:

$\mu(a_1) - \mu(a_2) \geqq \mu(0)$, also, da Wertebereich von $\mu \subseteqq \bar{R}_+$, auch $\geqq 0$.

2°. $\mu(0) = 0$.

Beweis. Aus $\mu(0) \neq 0$, also auch > 0, daneben $< \infty$ (wegen I. und 1°), folgte mit $\overline{\text{II}}$.:

$$\mu(0) - \mu(0) \geqq \mu(0), \text{ also } \mu(0) \leqq 0.$$

3°. Rechtfertigung der Annahme $\overline{\text{II}}$.: Bei a_1, a_2 wie in $\overline{\text{II}}$., „falls auch $a_1 - a_2 \in \mathfrak{A}^0$" ist nach 1°. $\mu(a_1 - a_2) \leqq \mu(a_1)$, somit ebenfalls endlich. Anwendung von $\overline{\text{II}}$. auf das Paar $\{a_1 - a_2, 0\}$ liefert:

$$\mu(a_1 - a_2) - \mu(0) = \text{obere Grenze aller } \mu(b) \text{ bei } b \in \mathfrak{A}^0, a_1 - a_2 \supseteqq b$$

oder, mit 2°.,

$$\mu(a_1 - a_2) = \text{obere Grenze aller } \mu(b) \text{ bei } b \in \mathfrak{A}^0, a_1 - a_2 \supseteqq b.$$

Mit $\overline{\text{II}}$. folgt

$$\mu(a_1 - a_2) = \mu(a_1) - \mu(a_2).$$

Definition. Für jedes $a \in \mathfrak{A}$ sei $m_0(a)$ die obere Grenze der $\mu(b)$ bei $b \subseteqq a, \in \mathfrak{A}^0$.

---

3) Dort formuliert mit den Notationen: $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}^\circ$, μ und m°, K.

Bemerkung. Für jedes $a \in \mathfrak{A}^0$ ist also $m_0(a) = \mu(a)$.

4°. bei $a_1, a_2 \in \mathfrak{A}^0$, $\mu(a_1 + a_2)$ endlich ist

$$\mu(a_1) + \mu(a_2) = \mu(a_1 + a_2) + \mu(a_1 \cdot a_2).$$

Beweis. Mit $\overline{\text{II}}$. und der Definition folgt

(9) $m_0(b_1) - m_0(b_2) = m_0(b_1 - b_2)$ bei $b_1 \supseteqq b_2$; $b_1, b_2 \in \mathfrak{A}^0$; $m_0(b_1)$ endlich.

Wegen $a_1 - a_1 \cdot a_2 = (a_1 + a_2) - a_2$ liefert Anwendung von (9) auf die Paare $\{a_1, a_1 \cdot a_2\}$ und $\{a_1 + a_2, a_2\}$:

$$m_0(a_1) - m_0(a_1 \cdot a_2) = m_0(a_1 - a_1 \cdot a_2) = m_0((a_1 + a_2) - a_2) = m_0(a_1 + a_2) - m_0(a_2),$$

wodurch

$$m_0(a_1) + m_0(a_2) = m_0(a_1 + a_2) + m_0(a_1 \cdot a_2),$$

also auch

$$\mu(a_1) + \mu(a_2) = \mu(a_1 + a_2) + \mu(a_1 \cdot a_2).$$

Definition. Die Klasse K von m_0-meßbaren Somen sei die Teilklasse von $\mathfrak{A}$, für deren jedes Element a bei jedem $w \in \mathfrak{A}^0$ mit $m_0(w)$ endlich gilt:

$$m_0(w) = m_0(w \cdot a) + m_0(w - w \cdot a).$$

Lemma. Jedes Soma $a \in \mathfrak{A}^0$ (also insbes. das Soma 0) ist m_0-meßbar, mit dem Maß $m(a) \equiv m_0(a) = \mu(a)$.

Beweis. Bei $w, a \in \mathfrak{A}^0$ und $m(w) \equiv m_0(w)$ endlich ist auch $w \cdot a \in \mathfrak{A}^0$, wobei $m_0(w) - m_0(w \cdot a) = \mu(w) - \mu(w \cdot a) = (\overline{\text{II}}.)$ obere Grenze aller $\mu(b)$ bei $b \in \mathfrak{A}^0$, $w - w \cdot a \supseteqq b =$ (erste Def. des Par.) $m_0(w - w \cdot a)$, also

$$m_0(w) = m_0(w \cdot a) + m_0(w - w \cdot a),$$

somit nach der zweiten Def. des Par. a m_0-meßbar.

Lemma. Bei v_j $(j = 1, 2) \in \mathfrak{A}$, $v_1 \cdot v_2 = 0$ und $m_0(v_1 + v_2)$ endlich ist

$$m_0(v_1 + v_2) \geqq m_0(v_1) + m_0(v_2).$$

Beweis. Bei $\varepsilon > 0$ gibt es $\bar{v}_j \in \mathfrak{A}^0$ mit $\bar{v}_j \subseteqq v_j$ und $\mu(\bar{v}_j) > m_0(v_j) - \varepsilon$. Dadurch ist

$$m_0(v_1 + v_2) \geqq \mu(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = (4°, 2°)\, \mu(\bar{v}_1) + \mu(\bar{v}_2) > m_0(v_1) + m_0(v_2) - 2\varepsilon,$$

also

$$m_0(v_1 + v_2) \geqq m_0(v_1) + m_0(v_2).$$

Folgerung 5°. Die Klasse K in der zweiten Definition ändert sich nicht wenn man „bei jedem $w \in \mathfrak{A}^0$" durch „bei jedem $w \in \mathfrak{A}$", wieder „mit $m_0(w)$ endlich", ersetzt.

Beweis. Es genügt aus der m_0-Meßbarkeit von $a \in \mathfrak{A}$ gemäß der Definition die m_0-Meßbarkeit von a gemäß der abgeänderten Definition abzuleiten.

Im entgegengesetzten Fall gibt es ein Soma $w \in \mathfrak{A}, \notin \mathfrak{A}^0$ mit $m(w) \equiv m_0(w)$ endlich und

$$m_0(w) \neq m_0(w \cdot a) + m_0(w - w \cdot a),$$

somit, nach dem vorigen Lemma, mit

$$m_0(w) > m_0(w \cdot a) + m_0(w - w \cdot a);$$

es gibt dann ein $\eta > 0$ mit

(10) $$m_0(w) - \eta = m_0(w \cdot a) + m_0(w - w \cdot a).$$

Zu w gibt es ein m_0-meßbares Soma $\bar{w} \subset w$ und $\in \mathfrak{A}^0$ mit

(11) $$m(\bar{w}) \equiv m_0(\bar{w}) = m_0(w) - \bar{\eta}, \text{ wobei } \bar{\eta} < \eta.$$

Nun ist

$$\bar{w} \cdot a \subseteqq w \cdot a \text{ und } \bar{w} - \bar{w} \cdot a \subseteqq w - w \cdot a,$$

wodurch

(12) $$m_0(\bar{w} \cdot a) \leqq m_0(w \cdot a) \text{ und } m_0(\bar{w} - \bar{w} \cdot a) \leqq m_0(w - w \cdot a).$$

Mit (11), (10) und (12) folgt

$$m(\bar{w}) = m_0(w) - \bar{\eta} > m_0(w \cdot a) + m_0(w - w \cdot a) \geqq m_0(\bar{w} \cdot a) + m_0(\bar{w} - \bar{w} \cdot a)$$

oder

$$m(\bar{w}) > m_0(\bar{w} \cdot a) + m_0(\bar{w} - \bar{w} \cdot a);$$

es gibt dann somit ein $\bar{w} \in \mathfrak{A}^0$ mit $m_0(\bar{w})$ endlich, zu welchem eine selbe Ungleichheitsrelation wie zu w gehört. Dies widerspricht jedoch die m_0-Meßbarkeit von a gemäß der ursprünglichen Definition.

Folgerung 6°. Aus $c \in \mathfrak{A}$ und $a \cdot c \in \mathfrak{A}^0$ für jedes $a \in \mathfrak{A}^0$ mit $\mu(a)$ $[= m_0(a)]$ endlich folgt $c \in K$.

Beweis. Mit (9) folgt

$$m_0(a) - m_0(a \cdot c) = m_0(a - a \cdot c),$$

wonach die letzte Definition liefert: $c \in K$.

Die vorausgesetzte Eigenschaft IV (Einleitung) zusammen mit der ersten Definition in diesem Par. liefert die

Folgerung 7°. Bei v_j $(j = 1, 2) \in \mathfrak{A}$, $v_1 \cdot v_2 = 0$ und endlichen $m_0(v_j)$ ist auch $m_0(v_1 + v_2)$ endlich.

§ 2^{bis}. Satz A^{bis}. Die in § 1^{bis} für die Somen von $\mathfrak{A}$ definierte Somenfunktion m_0 ist für $\mathfrak{A}$ ein inneres Maß im Sinne der in der Einleitung zitierten Arbeit, §§ 1, 2^{bis}, 3 (mit den das innere Maß charakterisierenden Axiomen 1°–4°, $\bar{5}$°, 6°) und 4. Die hier in § 1^{bis}, zweite Def. eingeführte Somenklasse K der m_0-meßbaren Somen ist ein Somenring $\supseteqq \mathfrak{A}^0$; das Maß

$m \equiv m_0$ ist additiv für die Somen von K, während für jedes $a \in \mathfrak{A}^0$ gilt:

$$m(a) \equiv m_0(a) = \mu(a);$$

$(K|m \equiv m_0)$ ist eine Erweiterung von $(\mathfrak{A}^0|\mu)$; sie ist vollständig in $\mathfrak{A}$ (im Sinne von loc. cit. Fußn. 3).

Beweis. Axiom 1° (es gibt ein Soma $w \in \mathfrak{A}$ mit $m_0(w)$ endlich und $\neq 0$) ist eine Folge der ersten Def. in § 1^bis und I. mit Folgerung 1° in § 1^bis.

Axiom 2° (das Soma 0 ist m_0-meßbar; dabei ist $a \in \mathfrak{A}$ m_0-meßbar falls *bei jedem* $w \in \mathfrak{A}$ *mit* $m_0(w)$ *endlich* gilt: $m_0(w) = m_0(w \cdot a) + m_0(w - w \cdot a)$) folgt aus dem ersten Lemma von § 1^bis mit Folgerung 5°.

Axiom 3° (aus $a, b \in \mathfrak{A}$, $a \subset b$ folgt $m_0(a) \leqq m_0(b)$) ist eine Folge der ersten Def. von § 1^bis mit Folgerung 1°.

Aus den Axiomen 1°, 2°, 3° folgte schon, nach loc. cit. § 1 (mit § 4), daß die Klasse K der m_0-meßbaren Somen in $\mathfrak{A}$ ein Somenring ist, wobei für $a, b \in K$ und $m_0(a+b)$ endlich gilt: $m_0(a+b) = m_0(a) + m_0(b) - m_0(a \cdot b)$. Zusammen mit Folgerung 7° (in § 1^bis) liefert dies die beschränkte Additivität von m_0 für die Somen von K.

Nach dem ersten Lemma in § 1^bis ist $\mathfrak{A}^0 \subseteqq K$, wobei aus $a \in \mathfrak{A}^0$ folgt $m(a) \equiv m_0(a) = \mu(a)$.

Axiom 4° (zu $a \in \mathfrak{A}$ mit $m_0(a)$ endlich gibt es ein $b \in K, \supseteqq a$ mit $m_0(b)$ endlich). Zu $a \in \mathfrak{A}$ mit $m_0(a)$ endlich gibt es nach Annahme IV. (mit $a_1 = a$, $a_2 = 0$) ein $a'' \in \mathfrak{A}^0$ mit $a \subset a''$ und $\mu(a'')$ oder $m_0(a'')$ endlich. Mit $b = a''$ folgt Axiom 4°.

„Aus $a \in \mathfrak{A}$ mit $m_0(a)$ endlich" folgt bei $\varepsilon > 0$ die Existenz eines $\bar{b} \in \mathfrak{A}^0, \subseteqq a$ mit $m_0(a) \geqq \mu(\bar{b}) > m_0(a) - \varepsilon$. Aus $\bar{b} \in \mathfrak{A}^0$ folgt auch $\bar{b} \in K$, mit $m_0(\bar{b}) = \mu(\bar{b})$. Somit ist „$m_0(a) =$ obere Grenze aller $m_0(\bar{b})$ mit $\bar{b} \subseteqq a, \in K$." D.i. Axiom $\bar{5}$°.

Axiom 6° (bei $a_1, \ldots, a_k$ $(k \geqq 2)$ m_0-meßbar, $a_{j_1} \cdot a_{j_2} = 0$ $(j_1 \neq j_2)$ und $m_0(\sum_{j=1}^{k} a_j) = \infty$ ist auch $\sum_{j=1}^{\infty} m_0(a_j) = \infty$) folgt sofort aus der schon bewiesenen Additivität von $m \equiv m_0$ für die Somen von K.

Schließlich folgt die Vollständigkeit von m_0 in $\mathfrak{A}$ wie in Fußn. 3 der mehrmals zitierten Arbeit.

Bemerkungen. a. Es gibt ein kleinster, das System $\mathfrak{A}^0$ umfassender *Somenring* $\mathfrak{A}^{00}$, welcher in K enthalten ist, wodurch $\mathfrak{A}$ auch als durch $\mathfrak{A}^{00}$ überdeckter Teilsomenring von $\mathfrak{B}$ aufzufassen ist.

b. Bei $\bar{\bar{\mu}} \equiv m_0$ für die Somen von $\mathfrak{A}^{00}$ ist $\bar{\bar{\mu}}$ *additiv auf* $\mathfrak{A}^{00}$, *mit Werten in* $\bar{R}_+$. Daneben ist für jedes Soma $a \in \mathfrak{A}$ mit $m_0(a)$ endlich:

$m_0(a) =$ (Ax. $\bar{5}$°) obere Grenze der $m_0(\bar{b})$ bei $\bar{b} \subseteqq a, \in K$,
$=$ (Def.) obere Grenze der $\mu(b)$ bei $b \subseteqq a, \in \mathfrak{A}^0$, somit auch:
$=$ obere Grenze der $\bar{\bar{\mu}}(c)$ bei $c \subseteqq a, \in \mathfrak{A}^{00}$;

und für jedes $a \in \mathfrak{A}$ mit $m_0(a) = \infty$:

zufolge der Monotonie von m_0: obere Grenze der $m_0(\bar{b}) = \infty$ für $\bar{b} \subseteqq a, \in K$,

zufolge der Definition von m_0: obere Grenze der $\mu(b) = \infty$ für $b \subseteqq a, \in \mathfrak{A}^0$,
somit auch obere Grenze der $\bar{\bar{\mu}}(c) = \infty$ für $c \subseteqq a, \in \mathfrak{A}^{00}$,
also wieder $m_0(a) =$ obere Grenze der $\bar{\bar{\mu}}(c)$ bei $c \subseteqq a, \in \mathfrak{A}^{00}$.
Damit folgt: [4])

Satz B^{bis}. Der Satz loc. cit. § 5^{bis} hier angewandt auf $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}^{00}$, $\bar{\bar{\mu}}$ führt zu demselben inneren Maß m_0 auf $\mathfrak{A}$, demselben Somenring $K, \supseteqq \mathfrak{A}^{00} \supseteqq \mathfrak{A}^0$ und demselben auf K additiven Maß $m \equiv m_0$ wie die Anwendung von Satz A^{bis} auf $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}^0$, μ; $(K|m \equiv m_0)$ ist auch Erweiterung von $(\mathfrak{A}^{00}|\mu)$.

§ 3. Unter der Annahme: *Für jedes $a \in \mathfrak{A}^{00}$ fallen untere Grenze aller $\mu(b)$ mit $b \supseteqq a, \in \mathfrak{A}^0$ und obere Grenze aller $\mu(b)$ mit $b \subseteqq a, \in \mathfrak{A}^0$ zusammen* ist für ein solches a $\bar{\mu}(a) = \bar{\bar{\mu}}(a)$.

Dann läßt sich auf $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}^{00}$, $\bar{\mu}$, m^0, K (in Satz B) einerseits, auf $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}^{00}$, $\bar{\bar{\mu}}$, m_0, K (in Satz B^{bis}) andererseits der Satz loc. cit. Par. 6 anwenden (mit $\mathfrak{A}^{00}$ anstatt $\mathfrak{A}^0$, $\bar{\mu} = \bar{\bar{\mu}}$ anstatt μ), woraus hervorgeht *daß die zugehörigen Erweiterungen $(K|m \equiv m^0)$ bzw. $(K|m \equiv m_0)$ von $(\mathfrak{A}^{00}|\bar{\mu} = \bar{\bar{\mu}})$, und damit auch von $(\mathfrak{A}^0|\mu)$, zusammenfallen*; die *adjungierten* äußeren und inneren Maßfunktionen m^0 und m_0 auf $\mathfrak{A}$ führen unter obiger Annahme zu derselben Maßerweiterung (von μ).

---

[4]) Man beachte auch daß Annahme IV. (in der Einleitung) insbes. die Hypothese loc. cit. § 5^{bis} für den hier betrachteten Fall von $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}^{00}$, $\bar{\bar{\mu}}$ zur Folge hat.

(To be continued)